1999-07-25
Kent Lund

Till **Min trettonåriga dotter Nathalie och andra som är intresserade av matematikens elementa**

Ämne
Om siffror och tal

1. Siffror och tal

Taltecknen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kallas *arabiska siffror.* De hindu- indiska tecken, talet noll och decimalsystemet, introducerades i Europa av araberna för knappt tusen år sedan. Först på 1500-talet används dessa matematiska *begrepp* mer allmänt i vårt hörn av världen.
De arabiska siffrorna är idag internationella och används praktiskt taget i alla länder och i de flesta skriftspråk.
Taltecknen I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X , L, C, D, M är också siffror men kallas *romerska siffror* och är mer än tvåtusen år gamla. De används fortfarande om än i begränsad omfattning; oftast vid numerisk (siffermässig) beteckning av *ordinaltal* (ordningstal), på t. ex kungar och kapitel i böcker.

II och 2 är olika siffror men har ändock samma betydelse och denna gemensamma betydelse refererar till *talet* två. Talet *två* är det som utmärker alla *par*, talet *tre* det som kännetecknar alla *trion*; oavsett alla egenskaper i övrigt.
Om man hos en *klass* av objekt fråndrar de individuella olikheterna mellan objekten och endast betraktar objekten som enheter så bildar klassen ett *tal,* nämligen klassens *antal*. Klassen - gruppen – kan bestå av de mest skilda objekt, saker, ting, föremål och företeelser. Genom att abstrahera de individuella olikheterna hos objekten, erhålls det som är ytterst gemensamt för alla objekt i klassen; de utgör tillsammans antalet objekt i klassen.

Med tal avsåg man ursprungligen de *”naturliga”* talen , dvs. hela positiva tal som 1, 2, 3, 4 osv. Under årtusenden kom talbegreppet att utvidgas successivt med *bråk*, *negativa tal*, *irrationella tal*, *imaginära tal* och kanske det viktigaste; *talet noll*. Dessa betydelsefulla matematiska uppfinningar kom att tillämpas i Europa så sent som på 1500-talet.
Begreppet noll fyller minst två viktiga funktioner, dels att utgöra *origo* i *koordinatsystem* och dels att vara *platsvärden* i *positionssystem*.

Anm.:
Det finns ingen nolla i det romerska talsystemet. *Epoken- startidpunkten- origo*- för den *gregorianska kalendern* är därför början av år **I**. Vid början av år **II** hade således endast *ett* år förflutit.

Det första *decenniet* omfattade åren 1-10 ; det andra decenniet = 11 – 20 ; det tredje decenniet = 21 – 30
Det första *seklet* omfattade åren 1-100; det andra seklet = 101-200; det tredje seklet = 201-300
Det första *millenniet* omfattade åren 1-1000; det andra millenniet = 1001-2000; det tredje millenniet = 2001-3000

Således påbörjas den 1 januari år 2001 både det tjugoförsta seklet och det tredje millenniet.

Det tjugonde seklet (århundradet) omfattar åren 1901-2000.
1900-talet är inte exakt detsamma som det tjugonde seklet utan omfattar åren 1900-1999.

Siffror är de tecken som representerar tal. Talen i sig har ingen ”språklig dräkt” och kan därför sägas vara internationella.
Om man efter en olycka säger att dödssiffran ökar menar man förmodligen att det är dödstalet som ökar. Storleken på siffror mätt i millimeter kan naturligtvis variera.
Man bör därför skilja mellan talets *tecken* och *talet* i sig.

Anm.:

A) I flera språk uttalas talen från 11 till 19 *rekursivt* dvs. att *entalen* anges *före* basen tio.
Exempel:
- 11, med betydelsen ”tioett” ; uttalas ”elva”; förmodad ursprungligt uttal ”en över tio”.
- 12, med betydelsen ”tiotvå” ; uttalas ”tolv”; förmodad ursprungligt uttal ”två över tio”.
- 13, med betydelsen ”tiotre” ; uttalas ”tretton”; förmodad ursprungligt uttal ”tre- t(i)an ”.
- 14, med betydelsen ”tiofyra”; uttalas ”fjorton”; förmodad ursprungligt uttal ”fyra- t(i)an ”.
- 15, med betydelsen ”tiofem”; uttalas ”femton”; förmodad ursprungligt uttal ”fem- t(i)an ”.
- 16, med betydelsen ”tiosex” ; uttalas ”sexton”; förmodad ursprungligt uttal ”sex- t(i)an ”.
- 17, med betydelsen ”tiosju” ; uttalas ”sjutton”; förmodad ursprungligt uttal ”sju- t(i)an ”.
- 18, med betydelsen ”tioåtta”; uttalas ”arton”; förmodad ursprungligt uttal ”åtta- t(i)an ”.
- 19, med betydelsen ”tionio” ; uttalas ”nitton”; förmodad ursprungligt uttal ”nio- t(i)an ”.

B) Efter tjugo byter entalet plats så att *bastalen* uttalas *först,* exempel: ”tjugoett”, ”trettioett” osv.

C) För vart tionde tal har man valt särskilda ord:
- tjugo, med betydelsen ” två tiotal”
- trettio, med betydelsen ”tre tiotal”
- fyrtio, med betydelsen ”fyra tiotal”
- femtio, med betydelsen ”fem tiotal”
- sextio, med betydelsen ”sex tiotal”
- sjuttio, med betydelsen ”sju tiotal”
- åttio, med betydelsen ”åtta tiotal”
- nittio, med betydelsen ”nio tiotal”

2. De fyra räknesätten

Uttrycket 8+2 uttalas ”åtta *plus* två” eller ”*summan* av åtta och två” eller ”åtta *adderat* med två”. Både 8 och 2 kallas *termer*. Räknesättet kallas ***addition***.

Uttrycket 8-2 uttalas ”åtta *minus* två” eller ”*differensen* av åtta och två” eller ”åtta *subtraherat* med två”. Både 8 och 2 kallas *termer*. Räknesättet kallas ***subtraktion***.

Uttrycket $8 \cdot 2$ uttalas ”åtta *gånger* två” eller ”*produkten* av åtta och två” eller ”åtta *multiplicerat* med två”. Både 8 och 2 kallas *faktorer*. Räknesättet kallas ***multiplikation***.

Anm.: Multiplikation är upprepad addition. Uttrycket 8x2 kan lika gärna skrivas som ”8+8” eller som ”2+2+2+2+2+2+2+2”.

Uttrycket $\frac{8}{2}$

uttalas ”åtta *genom* två” eller” *kvoten* av åtta och två” eller ”åtta *dividerat* med två”.
8 kallas för *täljare* och 2 för *nämnare*. Räknesättet kallas ***division.***

Anm.: a) Division är upprepad subtraktion
b) Division med noll saknar mening inom matematiken

3. Potenser, baser och exponenter

Vid *upprepad* multiplikation med samma faktor kan man skriva t.ex.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

Talet 2^4 kallas *potens* (eller dignitet*)* och uttalas ”två *upphöjt* till fyra”. 2 kallas potensens *bas* och 4 kallas dess *exponent* (eller logaritm), som anger antalet faktorer.

Potenslagar:

I. Potenser multipliceras vid *addition* av exponenter med lika bas

Exempel:

a) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^{2+3=5} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^{2+5} = 10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$

II. Potenser divideras vid *subtraktion* av exponenter med lika bas.

Exempel:

a) $\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^{5-3=2} = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b) $\frac{10^5}{10^3} = 10^5 \cdot 10^{-3} = 10^{5-3} = 10^{5-3=2} = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

Anm.: Räknetabeller och räknestickor som baseras på addition och subtraktion av logaritmer (exponenter) har haft stor betydelse för att förenkla multiplikation och division. Dessa hjälpmedel har sedan 1970-talet ersatts med räknedosor och datorer.

III. Om en potens är upphöjt till en exponent kan exponenterna *multipliceras*

Exempel:

a) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^{2 \cdot 3=6} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

b) $(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^{2 \cdot 3=6} = 10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$

IV. Om faktorerna i ett tal är upphöjt till *en och samma* exponent så gäller exponenten för varje faktor i talet

Exempel:

$(4 \cdot 2)^2 = 4^2 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 = 64$

V. Om kvoten i ett tal är upphöjt till *en och samma* exponent så gäller exponenten för såväl täljaren som nämnaren

Exempel:

$$(2/3)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Ett tal upphöjt till noll är lika med ett.

Exempel:

a) $\frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2^2}{2^2} = 2^2 \cdot 2^{-2} = 2^{2-2} = 2^{2-2=0} = 2^0 = 1$ Således är $2^0 = 1$

b) $\frac{9}{9} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3^2}{3^2} = 3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2-2} = 3^{2-2=0} = 3^0 = 1$ Således är $3^0 = 1$

Anm. : Noll upphöjt till noll (0^0) saknar mening inom matematiken

4. Positionssystem (eller talbeteckningssystem)

Ett positionssystem är ett talbeteckningssystem i vilket en siffras betydelse *även* beror på dess plats – position - i talbeteckningen. Exempelvis siffran 2 i decimalsystemet kan beteckna två ental, två tiotal, två hundratal, två tusental och så vidare, beroende på var i talbeteckningen siffran är placerad. Siffrorna 2222 representerar- från höger till vänster- 2 ental + 2 tiotal + 2 hundratal + 2 tusental.

Ett positionssystem som har basen

- tio kallas *tiosystemet* eller *decimalsystemet*
  Anm.: Användes i Indien på 500-talet men blev först på 1500-talet via araberna känt i Europa.

- två kallas *tvåsystemet* eller det *binära systemet*
  Anm.: Den binära serien 1, 2, 4, 8,… användes i Egypten redan för 3500 år sedan.

- sextio kallas *sexagesimalsystemet*
  Anm.: Basen 60 användes i Babylonien för 4000 år sedan. Ännu idag använder vi basen 60 vid vinkel- och tidindelning med sekunder och minuter.

- tjugo kallas *vegesimalsystemet*
  Anm.: Basen 20 användes på 300-talet av mayafolket, som oberoende av andra civilisationer, även uppfann såväl talet noll som positionssystemet. Tjogräkning förekommer än idag i de danska och franska språken.

- tolv kallas *duodecimalsystemet*
  Anm.: Förekom i Storbritannien för inte så länge sedan vid räkning med mynt. Indelning av dagen och natten i tolv delar är ett annat exempel.

- sexton kallas *hexagesimal - eller hexadecimal- eller sedecimalsystemet*
  Anm.: Talen representeras av följande sexton tecken: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E och F.

Systemets bas kan anges genom *index*. Det tal som den romerska siffran II betecknar, skrivs med index i det decimala systemet 2_{tio} och i det binära systemet $10_{två}$.

Positionssystem med liten bas använder få siffror (i tvåsystemet vanligtvis endast två) men redan små tal leder till långa talbeteckningar. Men om basen är stor blir talbeteckningarna förhållandevis korta.

Exempel:

Det tal som de romerska siffrorna MM betecknar, kan skrivas i

- tvåsystemet = 11111010000
- tiosystemet = 2000
- sextonsystemet = 7D0 (= $7 \cdot 16^{2} + 13 \cdot 16^{1} + 0 \cdot 16^{0}$ = 1792+208 +0 = 2000)

Anm.: Olika positionssystem är inte bara möjliga utan också utbytbara och har sina för- och nackdelar.

5. Tiosystemet (eller decimalsystemet)

Ett positionssystem där basen är talet tio kallas således tiosystemet eller decimalsystemet. I detta talbeteckningssystem används som bekant siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9.

I tiosystemet har siffrorna i exempelvis talbeteckningen 43,21 följande betydelse, räknat från höger till vänster:

- hundradelssiffra, betyder $1 \cdot 10^{-2}$, uttalas ”en hundradel”
- tiondelssiffra, betyder $2 \cdot 10^{-1}$, uttalas ”två tiondelar”
- decimaltecken, uttalas ”och eller komma”
- entalssiffra, betyder $3 \cdot 10^{0}$, kan uttalas ”tre ental”
- tiotalssiffra, betyder $4 \cdot 10^{1}$, kan uttalas ”fyra tiotal”

Talbeteckningen 43,21 uttalas ”fyrtiotre hela och tjugoen hundradelar” eller ”fyrtitre komma tjugoen”. Siffrorna till höger om decimaltecknet kallas *decimaler.*
I exemplet ovan är siffran 1 den andra decimalen och siffran 2 den första decimalen.

Anm.:
ISO (International Organization for Standardization) rekommenderar *komma* [,]som *decimaltecken* USA och UK fortsätter dock ”tills vidare” med decimal*punkt* [.]

6. Tvåsystemet (eller binära systemet)

Ett positionssystem där basen är talet två kallas således tvåsystemet eller det binära (=två) systemet. I detta talbeteckningssystem används vanligtvis *endast* siffrorna 0 och 1.

I tvåsystemet har siffrorna i exempelvis talbeteckningen 101,11 följande betydelse, räknat från höger till vänster:

- ¼ = $1 \cdot 2^{-2}$
- ½ = $1 \cdot 2^{-1}$
- binärtecken
- 1 = $1 \cdot 2^{0}$
- 0 = $0 \cdot 2^{1}$
- 4 = $1 \cdot 2^{2}$

Systemets bas kan anges genom index, exempel: $101{,}11_{\text{två}}$.

Uttrycket uttalas ”ett noll ett komma ett ett (bas två)” eller ”etta nolla etta komma etta etta (basen två)”.
Den binära talbeteckningen $101{,}11_{två}$ blir i tiosystemet =
$= 1 \cdot 2^{2} + 0 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 5{,}75_{tio}$.

Bit och byte

Internt i datorer och räknedosor utförs alla beräkningar i tvåsystemet.
Den minsta taltecknet i datorer kallas för *bit* (**b**inary dig**it**). En bit kan antingen vara ”släckt” och representera talet 0, eller ”tänd” och representera talet 1. En *byte* omfattar åtta bits och ger $2^{8} = 256$ valmöjligheter, som är tillräckligt för att koda bokstäver och andra skrivtecken binärt.
I datatekniska sammanhang betyder egendomligt nog kilo = 1024 (2^{10}),
mega = 1 048 576 (2^{20}) och giga = 1 073 741 824 (2^{30}) ; t.ex. 1 kilobyte = 1024 byte.

I alla andra sammanhang är som bekant kilo (**k**) = 1000 (10^{3}),
mega (**M**) =1 000 000(10^{6}) och giga (**G**) = 1 000 000 000 (10^{9}).

Omräkning av siffror i tiosystemet till siffror i tvåsystemet för samma tal.

Översättning från decimalt skrivsätt till binärt sker genom successiv division med 2 och avbryts när kvoten blir noll, varvid de *principala* resterna utvisar de binära siffrorna.
Anm.: Vid division av hela tal är den principala resten antingen 0 eller 1.

Exempel:
Omräkning av 2000_{tio} till binär siffra:

2000 divideras med 2; kvoten blir 1000 och resten 0
1000 divideras med 2; kvoten blir 500 och resten 0
500 divideras med 2; kvoten blir 250 och resten 0
250 divideras med 2; kvoten blir 125 och resten 0
125 divideras med 2; kvoten blir 62 och resten 1
62 divideras med 2; kvoten blir 31 och resten 0
31 divideras med 2; kvoten blir 15 och resten 1
15 divideras med 2; kvoten blir 7 och resten 1
7 divideras med 2; kvoten blir 3 och resten 1
3 divideras med 2; kvoten blir 1 och resten 1
1 divideras med 2; kvoten blir 0 och resten 1

Resterna skrivs ut efter varandra, i ordning *motsatt* den, i vilken de beräknats:
$11111010000_{två} = 2000_{tio}$

Omräkning av siffror i tvåsystemet till siffror i tiosystemet för samma tal.

Översättning från binärt skrivsätt till decimalt sker genom att talet skrivs som summan av potenser av 2.
Exempel:
Omräkning av $11111010000_{två}$ till decimal siffra =

$= 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{9} + 1 \cdot 2^{8} + 1 \cdot 2^{7} + 1 \cdot 2^{6} + 0 \cdot 2^{5} + 1 \cdot 2^{4} + 0 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 0 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0} =$
$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2000_{tio}$

7. Aritmetiska och geometriska serier

En *serie* erhålls, när elementen i en *talföljd* successivt adderas, varvid man erhåller *delsummorna*. Elementen i talföljden kallas *termer*.

I en *aritmetisk* serie är *differensen*(skillnaden) mellan varje term och närmast föregående *konstant*.
Exempel:

a) 1,2,3……. Differensen = 2-1= 3-2= 1
b) 1,3,5……. Differensen = 3-1= 5-3= 2

Anm.: Den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fick som tioåring av sin lärare uppgiften att addera de hundra första talen. Efter några sekunder hade Gauss löst uppgiften genom att observera att summan av första och sista talet, summan av andra och näst sista talet och så vidare, alla är lika stora.
1+100=101; 2+99=101; 3+98=101; 4+97=101;……
$1+2+3+\ldots100 = 100\cdot \frac{1+100}{2} = 5050$

I en *geometrisk* serie är *kvoten* mellan varje term och den närmast föregående *konstant.*
Exempel:

a) 1,2,4,…… Kvoten = $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$

b) 1,3,9,…… Kvoten = $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$

8. Den geometriska serien 2^n eller den binära talserien

Den geometriska serien 2^n är kvoten mellan varje term och den närmast föregående konstant och lika med *två*.

Exempel på serier ur serier 2^n:

a) 1, 2, 4, 8, 16,……… eller $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots.$
b) 5,10, 20, 40, 80,160,… eller $5\cdot 2^0, 5\cdot 2^1, 5\cdot 2^2, 5\cdot 2^3, 5\cdot 2^4, 5\cdot 2^5$
c) 1/2,1/4, 1/8, 1/16, 1/32, … eller $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}\ldots.$

Summan av termer ur serien 2^n, där n är ett heltal.

En legend berättar om att schackspelets indiske uppfinnare braminen Nassir av sin kung som belöning skulle få 1 vetekorn för första rutan på schackbrädet, 2 för det den andra rutan, 4 för den tredje osv.(för var och en av de 64 rutorna dubbelt så mycket som för närmast föregående).
För exempelvis den fjärde rutan skulle han få 2^3= 8 vetekorn och för dessa rutor sammanlagt erhålla $1+2+4+8 = 2^0+2^1+2^2+2^3 = 2\cdot2\cdot2\cdot2-1= 2^4-1=$ 15 vetekorn.
För ruta 64 skulle han således få 2^{63} = 9 223 372 036 854 775 808 och för totalsumman på de alla rutorna tillsammans 2^{64}-1 = 18 446 744 073 709 551 615 vetekorn. Detta sist-nämnda tal lär vara mer än några tusen år av Indiens veteskördar.

Multiplikation med hjälp av serien 2^n.

I ett papyrusmanuskript från 1600-talet f.Kr. författad av egyptiern Ahmes beskrivs bl.a. regler för multiplikation och division. Den egyptiska matematiken saknade visserligen nollan och därmed positionssystem men genom att de använde serien 2^n kunde de snabbt utföra numeriska beräkningar.
Man visste att *alla heltal* är tal ur eller summan av *tal ur serien* 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,4096, 8192,…..
Exempelvis är 7 = 1+2 +4 ; 15 = 1+2+4+8; 127 = 1+2+4+8+16+32+64.

Multiplikation reducerades till en serie av fördubblingar och division till en serie halveringar.
Antag att man vill multiplicera 256 med 17.
17 är summan av de binära talen 1 och 16.
16 erhålles genom att fördubbla 1 fyra gånger. För att beräkna 17· 256 fördubblas 256 fyra gånger och till resultatet addera ursprungstalet 256. Med de arabiska siffrorna skulle Ahmes kunna skriva:

1	256*
2	512
4	1024
8	2048
16	4096*
	*Addera dessa tal

Således är $17 \cdot 256 = 256 + 4096 = 1 \cdot 256 + 16 \cdot 256 = 2^8 + 2^{12} = 4352$

Man kan anta att Ahmes utantill kunde många fördubblingar, t.ex följande tabell

Avslutande kommentar

Matematik är bara ett av människan uppfunnet *språk* för att beskriva storleken hos storheter och relationer mellan mätbara objekt.
Matematiken och vetenskapen kan inte avgöra frågor om värden, livets mening och annat väsentligt. Men med vetenskapliga metoder kan vi uppnå kunskap om tillvaron. Nathalie, intressera Dig därför gärna för matematik och vetenskap!!

DEN GEOMETRISKA SERIEN 2^n (DÄR ^{n} ÄR ETT HELTAL)

$$2^n = x$$

n =	x =
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024
11	2 048
12	4 096
13	8 192
14	16 384
15	32 768
16	65 536
17	131 072
18	262 144
19	524 288
20	1 048 576
21	2 097 152
22	4 194 304
23	8 388 608
24	16 777 216
25	33 554 432
26	67 108 864
27	134 217 728
28	268 435 456
29	536 870 912
30	1 073 741 824
31	2 147 483 648
32	4 294 967 296
33	8 589 934 592
34	17 179 869 184
35	34 359 738 368

Käll- och litteraturförteckning:

Tryckta källor:
1. Högre Matematik för poeter och andra matematiska oskulder, Tönis Tönisson
2. Matematisk uppslagsbok, William Karush
3. Matematikens kulturhistoria, John McLeish
4. Matematikterminologi i skolan, Skolöverstyrelsen
5. Introduction to mathematical philosophy, Bertrand Russell
6. Encyclopedia Britannica
7. Ordlista version 14, 12 april 1999, Svenska datatermgruppen

Författarens blygsamhet förbjuder honom inte att rekommendera:
8. Indelning och beteckning av komplexa industriprodukter, Kent Lund
9. Den riktiga tvåtusenårsfesten firas först den 31 december år 2000!!!, Kent Lund
10. International standard for detonation of calendar time, Kent Lund

Otryckta källor:
11. ”Vad menar Du?” – Om språkliga uttryck och deras mening, Kent Lund